1 .B Si risolvano le seguenti equazioni/sistemi di equazioni differenziali ordinarie, alle derivate parziali, integrali.

a) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ d) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + y(t) = \delta(t) + \delta(2t) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''(t) - x(t) = t \quad x(0) = a \\ x'(t) + y(t) = t \quad y(0) = b, \ y'(0) = c \end{cases}$ f) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + x(t) = t \quad x(0) = a \\ x'(t) + y(t) = t \quad y(0) = b, \ y'(0) = c \end{cases}$

g) $\begin{cases} y''(t) - x'(t) + x(t) = t \quad x(0) = a \\ x'(t) + y(t) = t \quad y(0) = b, \ y'(0) = c \end{cases}$ h) $\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(0) = a \end{cases}$ e $f(t) = \begin{cases} b & 2kT \leq t \leq 2kT + T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

i) $\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \\ x(0) = a, \ x'(0) = b \end{cases}$ e $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$ Si dimostri che se $\omega T \neq 2n\pi$ per ogni n intero allora la soluzione è limitata mentre se accade il contrario allora diventa illimitata.

l) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ m) $\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin t + \sin(2t) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

2 .B Si risolvano le seguenti equazioni integrali

a) $\varphi(t) = t + \int_0^t dx \varphi(x) \sin(t - x)$, b) $\varphi(t) = e^t + \int_0^t dx \varphi(x) \sin(t - x)$, c) $\varphi(t) = t + \int_0^t dx \varphi(x) \sinh(t - x)$,
d) $\varphi(t) = \sin t + \int_0^t dx \varphi(x) \sin(t - x)$, e) $\varphi(t) = t + \int_0^t dx \varphi(x) e^{(t-x)}$,
f) Si risolva l'equazione integro–differenziabile (a è un numero reale positivo)

$$\begin{cases} y''(t) + a^2 \displaystyle\int_0^t x y(t - x) dx = \sin(\omega t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

3 .B Si risolvano le seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali

c) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = A\omega, \ u(0, t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = \omega, \ u_x(0, t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \sin x, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u(0, t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$ j) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$ l) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t + \sin(\omega x) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t\sin(\omega x) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$ n) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0, \ u_x(0, t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$

Soluzioni

1 .A

1 .B a) Si introduce la trasformata di Laplace della funzione $y(t)$ che definiamo come $\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} Y(p)$. In base alle regole ben note abbiamo $\mathcal{L}(y'') = p\mathcal{L}(y') - y'(0) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)$ e quindi $p^2Y(p) - pa - b - p\mathcal{L}(y) + a + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = e^{-pt_0}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0} + pa + b - a}{p^2 - p + 1}$ e quindi $y(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Scriviamo dà $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p^2 - p + 1} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa + b - a}{p^2 - p + 1} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = \dfrac{e^{p_1(t)(t-t_0)}}{p_1 - p_2} - \dfrac{e^{p_2(t)(t-t_0)}}{p_1 - p_2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)H(t - t_0)$ $y_2(t) = ae^{p_1t}\dfrac{p_1}{p_1 - p_2} - ae^{p_2t}\dfrac{p_2}{p_1 - p_2} + (b - a)\dfrac{e^{p_1t}}{p_1 - p_2} - (b - a)\dfrac{e^{p_2t}}{p_1 - p_2} = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + (b - a)\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$. La soluzione è $y(t) = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + (b - a)\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)H(t - t_0)$

• b) Gli stessi calcoli di prima ci portano a $p^2Y(p) - pa - b - 2p\mathcal{L}(y) + 2a + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = e^{-pt_0}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0} + pa + b - 2a}{p^2 - 2p + 1}$ e quindi $y(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Scriviamo dà $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p^2 - 2p + 1} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa + b - 2a}{p^2 - 2p + 1} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = \displaystyle\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}e^{p(t-t_0)}\Big|_{p=1}$ $y_2(t) = \displaystyle\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}e^{pt}(pa + b - 2a)\Big|_{p=1}$ da cui $y(t) = (t - t_0)e^{t-t_0}H(t - t_0) + e^t(t(b - a) + a)$

• i) Al solito si ottiene $X(p) = \dfrac{\mathcal{L}(f) + pa + b}{p^2 + \omega^2}$ e $\mathcal{L}(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pTk} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$ e quindi

$$x(t) = \sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{pt}(pa + b)}{p^2 + \omega^2} + \frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\Big)\Big|_{\pm i\omega} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\Big)\Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}};$$

$$\sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{pt}(pa + b)}{p^2 + \omega^2}\Big)\Big|_{\pm i\omega} = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t);$$

$$\sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\Big)\Big|_{\pm i\omega} = \frac{e^{i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{i\omega T} - 1)} - \frac{e^{-i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{-i\omega T} - 1)} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega(t + T));$$

$\displaystyle\lim_{p\to p_k}\frac{p - p_k}{e^{pT} - 1} = \frac{1}{T}$ e quindi $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\Big)\Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{Te^{2k\pi i\frac{t}{T}}}{(\omega T)^2 - (2k\pi)^2}$ e la serie è assolutamente convergente. La serie stessa è anche pari a $\dfrac{1}{\omega^2 T} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2T\cos 2k\pi\frac{t}{T}}{(\omega T)^2 - (2k\pi)^2}$

Si faccia attenzione al cammino di integrazione con cui chiudere l'integrale $x(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}$. Infatti le singolarità dell'integrando si trovano sull'asse immaginario ma non sono limitate né dall'alto né dal basso. Si prende allora una successione di cammini di integrazione siffatti:

$\gamma_k^1(t) = it$ per $-\dfrac{\pi}{T}(2k + 1) \le t \le \dfrac{\pi}{T}(2k + 1)$ e $\gamma_k^2(t) = \sqrt{a_0^2 + (\frac{\pi}{T})^2(2k + 1)^2}e^{i\varphi}$ con $\arctan\dfrac{\pi}{T}\dfrac{2k + 1}{a_0} \le \varphi \le 2\pi - \arctan\dfrac{\pi}{T}\dfrac{2k + 1}{a_0}$

2 .B • f) $\begin{cases} y''(t) + a^2\displaystyle\int_0^t xy(t - x)dx = \sin(\omega t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ Detta $\mathcal{L}(y)$ la trasformata di Laplace si ha $\mathcal{L}(y) = \dfrac{p^2\omega}{(p^2 + \omega^2)(p^4 + a^2)}$ per cui $y(t) = \displaystyle\sum_{p=\pm i\omega} Res\big(e^{pt}\mathcal{L}(y)\big) + \sum_{k=0}^{3} Res\big(e^{pt}\mathcal{L}(y)\big)\Big|_{p=p_k}$ e p_k sono le soluzioni della equazione $p^4 + a^2 = 0$.

$$\sum_{p=\pm i\omega} Res\big(e^{pt}\mathcal{L}(y)\big) = \frac{-\omega^3 e^{i\omega t}}{2i(\omega^4 + a^2)} + \frac{\omega^3 e^{-i\omega t}}{2i(\omega^4 + a^2)} = -\frac{\omega^2\sin(\omega t)}{\omega^4 + a^2}.$$

$$\sum_{k=0}^{3} Res\big(e^{pt}\mathcal{L}(y)\big)\Big|_{p=p_k} =$$
$$= \frac{\omega\sqrt{a}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{t\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{a}}}{4\omega^2 ai-4a^2}+\frac{\omega\sqrt{a}e^{i\frac{3}{4}\pi}e^{t\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\sqrt{a}}}{-4\omega^2 ai-4a^2}+\frac{-\omega\sqrt{a}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-t\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{a}}}{4\omega^2 ai-4a^2}+\frac{-\omega\sqrt{a}e^{i\frac{3}{4}\pi}e^{t\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\sqrt{a}}}{-4\omega^2 ai-4a^2}$$

Il quarto contributo è il complesso coniugato del primo ed il terzo del secondo per cui si ha

$$\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sqrt{a}(\omega^4+a^2)}e^{t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}}\Big((\omega^2-a)\cos(t\frac{\sqrt{2}}{2}a)+(\omega^2+a)\sin(t\frac{\sqrt{2}}{2}a)\Big)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sqrt{a}(\omega^4+a^2)}e^{-t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}}\Big((-\omega^2+a)\cos(t\frac{\sqrt{2}}{2}a)+(\omega^2+a)\sin(t\frac{\sqrt{2}}{2}a)\Big)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\omega}{2\sqrt{a}(\omega^4+a^2)}\Big((\omega^2-a)\cos(t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a})\sinh(t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a})+(\omega^2+a)\sin(t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a})\cosh(t\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a})\Big)$$

3 .B • c) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=B\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-pu_t(x,0)=p^2v(x,p)$. $\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v(0,p)=Be^{-pT}$ per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2v''-a^2v=0\\ v(0,p)=Be^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta=Be^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=B\delta(t-T-\frac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

• d) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-pu_t(x,0)=p^2v(x,p)$. $\mathcal{L}(u_x(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v_x(0,p)=Be^{-pT}$ per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2v''-a^2v=0\\ v_x(0,p)=Be^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta=-\frac{aB}{p}e^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p)=-aBH(t-T-\frac{x}{a})$ che rappresenta uno scalino di ampiezza $-aB$ viaggiante verso destra con velocità a. Dato un punto di ascissa x, per un tempo $t<t_x\stackrel{\text{def}}{=}T+\frac{x}{a}$ si ha $u(x,t)=0$. Passato t_x si ha $u(x,t)=-aB$.

• e) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u(0,t)=A\sin(\omega t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v(0,p)=\mathcal{L}(A\sin(\omega t))=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2v(x,p)-A\omega=a^2v''\\ v(0,p)=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2},\end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale impone $\beta=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p)=(\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=AH(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+A\omega t$

• f) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u_x(0,t)=B\sin(\omega t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=$

$p^2 v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t)) \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0,p) = \mathcal{L}(B\sin(\omega t)) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è $\begin{cases} p^2 v(x,p) - A\omega = a^2 v'' \\ v_x(0,p) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza si ha $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p} - \dfrac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)} e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = A\omega t - H(t-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(t-\frac{x}{a})$

• g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v_x(0,p) = 0$ impone $\dfrac{p}{a}(\alpha - \beta) = 0$ e quindi $\beta = 0$ da cui $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = \dfrac{A}{\omega^2}(t\omega - \sin\omega t)$

• h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - \sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p\mathcal{L}(u_t(x,t)) - u_t(x,0) = p(pv(x,p) - \sin x) = p^2 v(x,p) - p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx} = v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_x = v_x(x,p) = \int_0^{+\infty} dte^{-pt} B\delta(t-T) = e^{-pT}$ per cui nella funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ che possiamo scrivere anche come $\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v'' \\ v'(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore." $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2 h(s,p) - sv(0,p) - Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2 h(s,p) - p\mathcal{L}(\sin x) = a^2 s^2 h(s,p) - a^2 sv(0,p) - a^2 Be^{-pT}$ ossia $h(s,p) = \dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)} + \dfrac{-a^2 sv(0,p) - a^2 Be^{-pT}}{p^2 - a^2 s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \dfrac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \dfrac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT} - e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ impone $-\dfrac{a}{p^2+a^2} + v(0,p) + Be^{-pT} = 0$ e quindi $v(0,p) = \dfrac{a}{p^2+a^2} - Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x} - Be^{-\frac{p}{a}x - pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t) = \sin x\cos at + H(t-\frac{x}{a})\sin(at-x) - aBH(t-\frac{x}{a}-T)$

• i) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{\lambda^2+p^2} \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| =$

0 e quindi $\alpha = 0$. $v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}$ impone $v(x,p) = \Big(\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2} - \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big)e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = H(t-\dfrac{x}{a})\big(A\sin\lambda(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\dfrac{x}{a}) - \dfrac{t}{\omega}\big) - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) + \dfrac{t}{\omega}$